

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

**Exercice I**

Les questions sont indépendantes.

1) Définition de la dérivée :

a) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$ .

b) Prouver que  $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est  $\begin{cases} \text{continue en } 0 \\ \text{dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et donner } f' \\ \text{non dérivable en } 0 \end{cases}$ .

2) Théorème de Rolle ; des accroissements finis ; quelques applications.

a) Énoncer le théorème de Rolle.

b) Énoncer le théorème des accroissements finis, forme égalité (avec les hypothèses fines).

c) Démontrer le théorème des accroissements finis à partir du théorème de Rolle.

d) Applications :

• Prouver :  $(\forall \alpha \in ]0, 1[)(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < (n+1)^\alpha - n^\alpha < \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$

• Prouver :  $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) |\operatorname{th} b - \operatorname{th} a| \leq |b - a|$ .

3) Formules de Taylor.

a) Énoncer le théorème de Taylor Lagrange, forme égalité (avec les hypothèses fines).

b) Applications :

• Prouver que :  $(\forall x \in ]-\infty, 0]) \left| e^x - \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \right| \leq \frac{x^4}{4!}$ .

• Soit  $f : I$  intervalle de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  2 fois dérivable avec :  $(\forall x \in I) f''(x) \geq 0$ .

Prouver que :  $(\forall (a, x) \in I^2) f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ . Conséquence graphique ?

**Exercice II**

1) Étudier et représenter graphiquement  $f : x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$

(on s'intéressera, en particulier, à l'existence d'un prolongement par continuité en 0, dérivabilité de celui-ci etc..)

2) Recherche d'un équivalent simple de :  $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$  au voisinage de  $+\infty$  :

en appliquant le T.A.F. à  $f$  sur  $[n, n+1]$ , en déduire :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists c_n \in ]n, n+1[) u_n = c_n^{\frac{1}{n}} \frac{1 - \ln c_n}{c_n^2}$$

a) Prouver :  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$  et en déduire :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln c_n}{c_n^2}$ .

b) Prouver :  $c_n \underset{+\infty}{\sim} n$  et en déduire finalement (en justifiant soigneusement) :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}$ .

**Exercice III**

Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$  et  $u$  une suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Étudier  $f$  et prouver que l'intervalle  $I = ]0, 1[$  est stable par  $f$ . Conclusion pour la suite  $u$  ?

2) Prouver que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

3) Montrer que  $f$  a un unique point fixe  $l$  dans  $]0, 1[$  et que  $u$  converge vers  $l$ .

4) Plus précisément, que peut-on dire de  $|u_n - l|$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

Déterminer un  $n_0$  à partir duquel on peut assurer que  $u_n$  est une valeur approchée de  $l$  à  $10^{-3}$  près.

I) 1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x - 1}{x} \right)$  soit  $f(x) = 2^x$ , on a  $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = \ln(2) 2^x \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = \ln(2)$$

b) Prouver  $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & // x \neq 0 \\ 0 & // x = 0 \end{cases}$   $\left( \begin{array}{l} \text{continue en } 0 \\ \text{dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et donner } f' \\ \text{non dérivable en } 0 \end{array} \right)$

~~$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) =$~~   $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x| \quad \text{or } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| = 0 = f(0)$

donc  $f$  est continue en 0

Sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$   $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \\ \sin \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \\ x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \end{array} \right.$

Donc par composée et produit de fonctions dérivables,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , avec  $f'(x) = x \left( -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$T_{x,0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} T_{x,0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$  n'existe pas (démontrable à l'aide de 2 suites issues de  $f$  ayant 2 limites différentes)

2) a. Th de Rolle: Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur } ]a, b[ \\ f(a) = f(b) \end{cases}$  (Ex I) ?

Alors  $(\exists c \in ]a, b[)$  tel que  $f'(c) = 0$

b. TAF: Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur } ]a, b[ \end{cases}$

Alors  $(\exists c \in ]a, b[)$ , tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

c. Démonstration à l'aide du théorème de Rolle:

Soit  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\begin{cases} (k \in \mathbb{R}) \\ g(a) = f(b) \end{cases}$   
 $(x \mapsto f(x) - kx)$

• Donc  $f(a) - ka = f(b) - kb$

$$\Leftrightarrow f(a) - f(b) = ka - kb \Leftrightarrow \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = k$$

•  $g$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  avec  $g'(x) = f'(x) - k$

• En appliquant le théorème de Rolle,  $(\exists c \in ]a, b[)$  tel que  $g'(c) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(c) - k = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = k$$

$$\Leftrightarrow \underline{f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}}$$

d. Applications

\* Soit  $f(x) = (n+x)^\alpha$   $\begin{cases} \alpha \in ]a, b[ \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$   $f(0) = n^\alpha$   $f(1) = (n+1)^\alpha$

$f$  est continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$ , avec  $f'(x) = \alpha (n+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{(n+x)^{1-\alpha}}$

① après TAF,  $(\exists c \in ]0, 1[)$  tel que  $f(1) - f(0) = f'(c) = \frac{\alpha}{(n+c)^{1-\alpha}}$

$$\text{or } 0 \leq c \leq 1 \text{ donc } \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq f'(c) \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \Leftrightarrow \underline{\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}}$$

\*  $\text{th}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable dans  $\mathbb{R}$  tel que  ~~$\text{th}' = 1 - \text{th}^2$~~   $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$

or  $(\forall x \in \mathbb{R})$   ~~$1 - \text{th}^2 = 1$~~   ~~$\text{th}^2 \leq 1$~~

$$1 - \text{th}^2 \leq 1$$

donc d'après TAF  $\left| \frac{\text{th}a - \text{th}b}{a-b} \right| \leq 1$

$$\Leftrightarrow |\text{th}a - \text{th}b| \leq |a-b| \quad (\text{ordre sans importance})$$

3) Formules de Taylor =

a) Théorème de Taylor-Lagrange, forme égalité

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [a, b] \quad (n \in \mathbb{N}) \\ n+1 \text{ fois dérivable sur } [a, b] \end{array} \right.$

Alors  $(\exists c \in ]a, b[)$ , tel que  $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

$$\Leftrightarrow f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

b) Applications

Pour  $f(x) = e^x$   $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f^{(n)}(x) = e^x$

$$\text{or } f^{(n)}(0) = 1$$

$$\text{donc } T_{f,0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Donc d'après le Th de TL,  $(\exists c \in ]0, x[)$  tel que  $f(x) - T_{f,0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$

$$\text{On pose } n=3 \quad f(x) - T_{f,0,3}(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4$$

Or  $f^{(4)}(c) = e^c$  ~~donc~~ et ~~on a~~  $e^2 \leq e^c \leq 1$

$$\text{donc } \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4 \right| \leq \frac{x^4}{4!} \Leftrightarrow |e^x - T_{f,0,3}(x)| \leq \frac{x^4}{4!}$$

\*  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  2 fois dérivable tq  $f''(x) \geq 0 \quad (\forall x \in I)$

(ExI) 3

Donc  $\begin{cases} f' \\ f \end{cases}$  est continue sur I

Donc d'après TL  $(\forall a, x \in I^2), (\exists c \in I)$  tel que =

$$f(x) = ~~Taylor~~ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

or  $f''(c) \geq 0$  donc  $\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2 \geq 0$

donc  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall (a, x) \in I^2$

→ le Tx de variation entre  $x$  et  $a$  est plus grand que celui de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $a$ .

Exercice II :

1)  $f: x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$        $f(x) = e^{x \ln x}$

Etude de f :

$D_f = \mathbb{R}^+$

f est continue, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , avec  $f'(x) = (-x \frac{\ln x}{x})' x^{\frac{1}{2}}$   
 $= (-\frac{\ln x + 1}{x^2}) x^{\frac{1}{2}}$

du signe de  $(1 - \ln x)$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$e^{\frac{1}{e}}$	1

- $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} \ln x) = -\infty$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 0$
- $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = 1$

Donc f est prolongeable en 0 avec  $\tilde{f}(0) = 0$

$x \neq 0, T_{0,x} = \frac{f(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = x^{-\frac{1}{2}} = e^{(\frac{1-\ln x}{2}) \ln x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} (T_{0,x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 0$  donc  $\tilde{f}$  est dérivable en 0 avec  $\tilde{f}'(0) = 0$

2)  $u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

f est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , ~~est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$~~

$f(n) = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$   
 $f(n+1) = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{n+1}$

$u_n = f(n+1) - f(n)$

D'après le TAF,  $\exists c_n \in ]n, n+1[$  tel que  $f(n+1) - f(n) = f'(c_n) (n+1 - n)$

$\Leftrightarrow u_n = f'(c_n) = \frac{(1 - \ln c_n)}{c_n^2} \times c_n^{\frac{1}{c_n}}$

$c_n \in [n, n+1]$  donc si  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $c_n \rightarrow +\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{c_n \rightarrow +\infty} (f'(c_n)) = \lim_{c_n \rightarrow +\infty} f(c_n) \times \lim_{c_n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \ln c_n}{c_n^2} \right) = \lim_{+\infty} \left( \frac{1 - \ln c_n}{c_n^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} - \frac{\ln c_n}{c_n^2}$$

~~car~~

$$\begin{cases} n \underset{+\infty}{\sim} n \\ n+1 \underset{+\infty}{\sim} n \end{cases} \text{ or } c_n \in [n, n+1] \text{ donc } c_n \underset{+\infty}{\sim} n$$
$$\text{donc } c_n^2 \underset{+\infty}{\sim} n^2$$

Par théorème (spécial pour  $\ln$  et équivalent):  $c_n \underset{+\infty}{\sim} n \Rightarrow \ln c_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

$$\text{Donc finalement, } u_n \underset{+\infty}{\sim} - \frac{\ln c_n}{c_n^2} \underset{+\infty}{\sim} - \frac{\ln n}{n^2}$$

### Exercice 3

$$1) f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$u_n \begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

$$\frac{e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$f$  est continue, définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ donc } f \text{ str } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$+$
$f(x)$	$0$	$1$

Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{e}{e+1} \leq 1$  donc  $f(I) \subset I$

donc  $I$  est stable par  $f$ . Or  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $[0, 1]$

donc  $f(I) \subset f(\mathbb{R}) \subset I$

donc  $\forall a \in \mathbb{R} \ u_n \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \rightarrow \in [0, 1]$  donc  $\forall n \geq 1, u_n \in [0, 1]$

- Montrons que  $f$  a un unique point fixe  $l \in [0,1]$  et que  $u$  converge vers  $l$ .

$[0,1]$  stable par  $f$ ,  $f$  est contractante.

$$u_1 \in [0,1]$$

Donc  $\exists ! l \in [0,1]$  point fixe de  $f$  sur  $I$ , et  $u_n$  converge vers  $l$

- De plus nous avons  $|u_n - l| \leq k^{n-1} |u_1 - l|$   
 $\Leftrightarrow |u_n - l| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - l| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$   
car  $|u_1 - l| \leq 1$

- On cherche  $|u_n - l| \leq 10^{-3}$

On cherche alors  $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow (n-1) \ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq -3 \ln(10)$

$$\Leftrightarrow (n-1) \geq \frac{-3 \ln(10)}{-\ln 4}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 4} + 1 = 5, \dots$$

donc à partir de  $n=6$ ,  $|u_n - l| \leq 10^{-3}$