

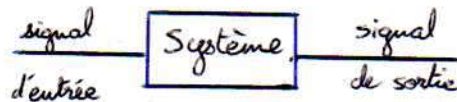
# INTRODUCTION

\* Signal causal : signal nul tant que  $t < 0$  :  $s(t) = 0$  si  $t < 0$   
De façon générale,  $t \in \mathbb{R}_+$

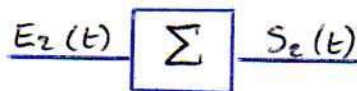
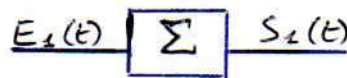
\* signal analogique

\* signal déterministe : pas de bruits

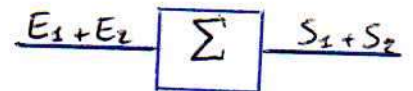
Par définition :



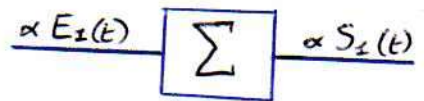
Système linéaire :



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



(Exemple : Saturation  $\Rightarrow$  non-linéaire)

Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

Par exemple : petites variations  $\sin x \approx x$

Système stationnaire : La même expérience avec les mêmes conditions initiales donne les mêmes résultats.

(On va maintenant considérer les systèmes linéaires stationnaires à temps continus.  
Les signaux entrée/sorties sont liés par des équations linéaires à coeff constants

Equadiff  $\Rightarrow$  Transformée de Laplace (système à temps discret)

Réurrence  $\Rightarrow$  Transformée en  $Z$  (système à temps limité)

Il existe également la Transformée de Fourier

Impédance complexe:  $U(\omega) = Z(\omega) I(\omega) \Rightarrow$  vrai en régime permanent

Grâce à la Transformée de Laplace, les impédances complexes sont généralisables en impédances symboliques qu'on peut utiliser qq soit le signal d'entrée.

# I) Transformée de Laplace

## 1) Définitions et exemples

\* Soit  $f$  une fonction causale ( $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$  si  $t < 0$ )

On appelle Transformée de Laplace de  $f(t)$  la fonction complexe  $F(p)$  ( $p \in \mathbb{C}$ )

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

lorsque l'intégrale est définie et convergente.

\* Soit  $p = \sigma + j\omega$

La plus petite valeur  $\sigma_0$  tq pour  $\sigma > \sigma_0$  l'intégrale converge est appelée seuil de convergence.

## \* EXEMPLES

• Echelon ou fonction de Heaviside : 
$$\begin{cases} u_h(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u_h(t) = 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u_h(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p} [e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$\text{or } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sigma t} = 0 & \text{si } \sigma > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sigma t} = +\infty & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad \text{dans ce cas l'intégrale n'est pas définie.}$$

Le seuil de convergence est donc  $\sigma_0 = 0$

- Rampe

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{si } t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt \stackrel{(IPP)}{=} \left[ -\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \left[ -\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + \left[ \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

Seuil de convergence :  $\sigma_0 = 0$

- Exponentielle causale

$$\begin{cases} f(t) = e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at-pt} dt = \left[ -\frac{1}{a+p} e^{-(a+p)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Seuil de convergence  $\sigma_0 = a$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}}$$

- Impulsion ou Dirac

$$\delta(t) = 0 \text{ pour } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{Poids du Dirac}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = \left[ e^{-pt} \right] = 1$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta(t)) = 1}$$

\* La transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = \frac{1}{2j\omega} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{ip\omega} dp \quad \text{pour } \sigma > \sigma_0$$

2) Propriétés de la TL :

\* Linéarité :  $\begin{cases} \text{Soient 2 fonctions } f \text{ et } g \text{ causales et fonctions de } t. \\ \text{Soient } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-pt} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)) \quad \triangle \text{ si les intégrales convergent. } \triangle \end{aligned}$$

\* Théorème de la dérivée

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ e^{-pt} f(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -p f(t) e^{-pt} dt$$

par hypothèse  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$  existe

$$\text{d'où } \mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = 0 - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

(causalité)

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \mathcal{L}(f(t)) - f(0^+)}$$

Remarque : Si les CI sont nulles (système au repos):

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \mathcal{L}(f(t))$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \mathcal{L}(f(t))$$

$$\mathcal{L}(u_n(t)) = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}(t u_n(t)) = \frac{1}{p^2}$$

## \* Théorème de l'intégrale

Soit  $g(t) = \int_0^t f(t) dt$  primitive de  $f(t)$  qui s'annule en 0.

$$\mathcal{L}\left(\frac{dg(t)}{dt}\right) = p \mathcal{L}(g(t)) - g(0^+)$$

$$\text{d'où } \mathcal{L}\left(\int_0^{\infty} f(t) dt\right) = \frac{1}{p} F(p)$$

$\left( \frac{1}{p} \text{ est l'opérateur d'intégration} \right)$   
 $\left( p \text{ est l'opérateur de dérivation } \Delta \subset \mathbb{I} \right)$

## \* Théorème du retard

Soit  $g(t)$ , la fonction  $f(t)$  retardée de  $\tau$

$f(t)$  étant causale, on a  $g(t) = 0$  pour  $t \in [0, \tau[$

et  $g(t) = f(t - \tau)$  pour  $t \geq \tau$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^{\tau} g(t) e^{-pt} dt + \int_{\tau}^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

$$= 0 + \int_{\tau}^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

changement de variable:  $t' = t - \tau$

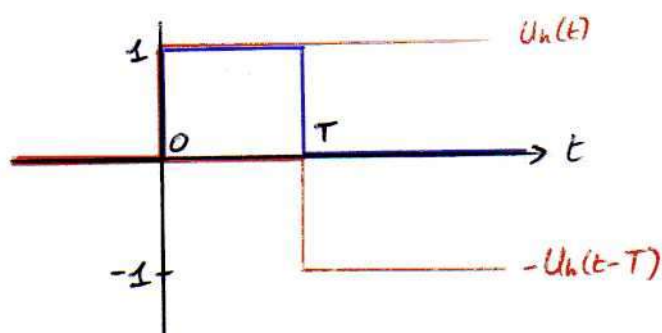
$$= \int_0^{+\infty} f(t') e^{-p(t'+\tau)} dt'$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(t') e^{-pt'} dt' = e^{-p\tau} \mathcal{L}(f(t))$$

$$\text{donc } \boxed{\mathcal{L}(f(t-\tau) u_h(t-\tau)) = e^{-p\tau} \mathcal{L}(f(t))}$$

Exemple : TL d'une porte

$$f(t) = u_h(t) - u_h(t-T)$$



$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT}}{p} = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

### \* Transformée d'une fonction périodique

Soit  $f(t)$  une fonction nulle en dehors de l'intervalle  $[0, T]$

et soit  $f_T(t)$  la fonction définie par 
$$\begin{cases} f_T(t - kT) = f(t) & k \in \mathbb{N} \\ f_T(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$
 (Comme  $f_T(t)$  est causale, elle n'est pas périodique au sens math.)

$$f_T(t) = f(t) + f(t-T)u_h(t-T) + f(t-2T)u_h(t-2T) + \dots + f(t-kT)u_h(t-kT) + \dots, \quad k \in \mathbb{N}$$

On utilise la linéarité de la TL et le théorème du retard

$$\begin{aligned} F_T(p) &= F(p) + e^{-pT}F(p) + e^{-2pT}F(p) + e^{-kpT}F(p) + \dots \\ &= (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots + e^{-kpT} + \dots) F(p) \end{aligned}$$

$$F_T(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} F(p)$$

Exemple : Un signal d'horloge est une porte périodisée

Porte de longueur  $T$

Période  $T$

$$\text{Soit } F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

(si  $t = T$ , on retrouve le TL de l'échelon, soit  $\frac{1}{p}$ )

### \* Transformée d'un signal amorti (module)

$$\text{Soit } g(t) = e^{-at} f(t)$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+a)t} dt = F(p+a)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(p+a)}$$

### \* Théorème de la valeur initiale

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p)}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p F(p) - f(0^+)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (p F(p) - f(0^+)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \right) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p) = f(0^+)$$

### \* Théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = f(\infty) - f(0^+) = \lim_{p \rightarrow 0} (p F(p) - f(0^+))$$

## \* Théorème de convolution

Soient  $f$  et  $g$ , 2 fonctions causales.

Le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau = (g * f)(t)$$

$$\left( \begin{array}{l} g \text{ étant causale, } g(t) = 0 \quad \forall t \in ]-\infty, 0[ \\ f \text{ étant causale, } f(t-\tau) = 0 \quad \forall t \in ]-\infty, \tau[ \end{array} \right)$$

$$\text{d'où } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$\bullet \underline{\mathcal{L}(f * g)(t) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))}$$

PRELIVE soit  $\varphi(t) = (f * g)(t)$

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau) g(\tau) dt d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p(\tau+u)} f(u) du g(\tau) d\tau \quad \left. \begin{array}{l} \searrow \\ (u = t - \tau \quad du = dt) \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du \cdot \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} g(\tau) d\tau$$

$$= \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Attention  $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) \neq \mathcal{L}(f \cdot g) !$

## 3) Fonction de transfert

Définition: la fonction transfert du système (LTI) d'entrée  $E$  et de sortie  $S$  est la fonction:  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  (lorsque les CI sont nulles)

ex TD1:  $Q(p) = \underbrace{G(p)}_{CI=0} U(p) + d(p)q_0$

Si on a un système linéaire stationnaire à temps continu, les signaux d'entrée et de sortie sont reliés par une eq. diff à coef constants:

$$a_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 e(t) = b_d \frac{d^d s(t)}{dt^d} + \dots + b_0 s(t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k e(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^d b_j \frac{d^j s(t)}{dt^j} \quad (E)$$

• Si les CI = 0, avec le théorème de la dérivée:  $\mathcal{L}\left(\frac{de(t)}{dt}\right) = p \mathcal{L}(e(t)) - e(0)$

donc  $\mathcal{L}\left(\frac{de(t)}{dt}\right) = p E(p)$

donc  $\mathcal{L}\left(\frac{d^i e(t)}{dt^i}\right) = p^i E(p) \quad (\forall i \in [0, n])$

$\mathcal{L}\left(\frac{d^j s(t)}{dt^j}\right) = p^j S(p) \quad (\forall j \in [0, d])$

$$\Rightarrow (E): \sum_{k=0}^n a_k p^k E(p) = \sum_{j=0}^d b_j p^j S(p)$$

d'où  $S(p) = \frac{\sum a_k p^k E(p)}{\sum b_j p^j} = G(p)$

On a donc  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

La fonction de transfert du système  $\Sigma$  est définie par le quotient de la transformée de Laplace du signal de sortie par la TL du signal d'entrée SI LES CI SONT NULLES!

Exemple : circuit RC (cf TD)

6

• Si les CI ne sont PAS nulles :

$$\mathcal{L}\left(\frac{de(t)}{dt}\right) = pE(p) - e(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2e(t)}{dt^2}\right) = p^2E(p) - pe(0) - \dot{e}(0)$$

$$\Rightarrow (E) : \sum a_i p^i E(p) - \underbrace{I(p)}_{\downarrow} = \sum b_j p^j S(p) - \underbrace{J(p)}_{\downarrow}$$

(polynômes de degré  $(n-1)$  et  $(d-1)$  dont les coef dépendent des CI sur l'entrée ou sur la sortie et des  $a_i$  ou  $b_j$ )

$$\sum b_j p^j S(p) = \sum a_i p^i E(p) - I(p) + J(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{\sum a_i p^i E(p)}{\sum b_j p^j} - \frac{I(p) - J(p)}{\sum b_j p^j}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = G(p) E(p) - \frac{I(p) - J(p)}{\sum b_j p^j}$$

si on connaît  $e(t)$  donc  $E(p)$ , le système est connu donc on connaît sa fonction de transfert

$$\text{D'où, si on calcule } s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)E(p) - F(p))$$

$$= \mathcal{L}^{-1}(G(p)E(p)) + \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

Régime Forcé

Régime Libre

La réponse totale du système est la somme de sa réponse forcée  
 (CI=0 et  $e(t) \neq 0$ ) et de sa réponse libre ( $e(t)=0$  et CI  $\neq 0$ )

Système  
strictement causal  
 $n < d$

$$s(t) = s_f(t) + s_l(t)$$

$$(TVP) \lim_{p \rightarrow 0} s_f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S_f(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\overset{d^0 \text{ et } d^1}{J(p)} - \overset{d^0 \text{ et } d^1}{I(p)}}{\sum_{j=0}^d b_j p^j} = 0 \quad (\text{si } p=0 \text{ n'est pas un pôle})$$

On peut en déduire (qu'en général) les CI ne modifient pas le régime permanent.

#### 4) Etude des réponses des systèmes

On suppose les CI nulles (car on vient de démontrer qu'on peut calculer indépendamment  $s_l(t)$ )

##### \* Réponse impulsionnelle

$$\text{si } e(t) = \delta(t) \quad E(p) = 1$$

$$\text{Alors la TL du signal de sortie: } S(p) = G(p) E(p) = G(p)$$

$$\text{Soit } s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$$

La réponse impulsionnelle du système est la TL inverse de la fonction de transfert.  
 (et la fonction de transfert est la TL de la réponse impulsionnelle)

### \* Réponse indicienne (échelon)

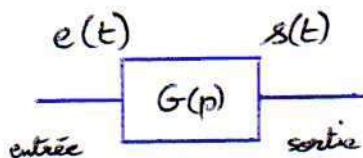
$$e(t) = u_h(t) \quad E(p) = \frac{1}{p}$$

d'où la TL de la réponse indicienne:  $S(p) = \frac{1}{p} G(p)$

$$\text{soit } s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G(p)}{p} \right)$$

La réponse impulsionnelle du système est la dérivée de la réponse indicienne.  
 $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$

### \* Réponse à un signal quelconque



$$S(p) = G(p) E(p)$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p) E(p)) = g * e(t)$$

La réponse d'un système à une entrée qq est le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle du système ( $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$ ) et l'entrée du système

$$s(t) = \int_0^t g(t-\tau) e(\tau) d\tau$$

### \* Réponse harmonique

$$e(t) = \sin(\omega t) u_h(t) \quad \text{donc} \quad E(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

La TL du signal de sortie est donc:  $S(p) = G(p) \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Supposons pour simplifier que  $G(p)$  a tous ses pôles distincts et que  $\pm j\omega$  ne sont pas des zéros de  $G(p)$

$S(p)$  a pour pôles les mêmes que  $G(p)$  + les pôles complexes conjugués  $\pm j\omega$  (due à  $e(t)$ )

D'où la DES de  $S(p)$  est

$$S(p) = \frac{\alpha_1}{p-p_1} + \dots + \frac{\alpha_d}{p-p_d} + \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} = \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} + \sum_1^d \frac{\alpha_i}{p-p_i}$$

$$(p^2+\omega^2) S(p) = Ap+B + (p^2+\omega^2) \sum_1^d \frac{\alpha_i}{p-p_i} = \omega G(p)$$

$$\begin{cases} (p=\pm j\omega) & \omega G(j\omega) = Aj\omega + B \\ & \omega G(-j\omega) = -Aj\omega + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{\omega}{2} (G(j\omega) + G(-j\omega)) \\ & 2 \operatorname{Re}(G(j\omega)) \\ A = \frac{1}{2j} (G(j\omega) - G(-j\omega)) \\ & 2j \operatorname{Im}(G(j\omega)) \end{cases}$$

$G(p)$  est une fraction rationnelle à coef réels :  $G(j\omega) = \overline{G(-j\omega)}$

$$\text{d'où } \begin{cases} A = \operatorname{Im}(G(j\omega)) \\ B = \omega \operatorname{Re}(G(j\omega)) \end{cases}$$

Potons  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi_\omega}$  où  $\varphi_\omega = \arg[G(j\omega)]$

$$\text{D'où } S(p) = |G(j\omega)| \sin \varphi_\omega \frac{p}{p^2+\omega^2} + |G(j\omega)| \cos \varphi_\omega \frac{\omega}{p^2+\omega^2} + \sum \frac{\alpha_i}{q-p_i}$$

$$\Rightarrow \text{donc par TL inverse : } s(t) = |G(j\omega)| \sin \varphi_\omega \cos \omega t + |G(j\omega)| \cos \varphi_\omega \sin \omega t + \sum \alpha_i e^{p_i t}$$

Si tous les pôles sont à partie réelle négative (càd système stable)

Alors  $\sum \alpha_i e^{p_i t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{D'où } s(t) \approx |G(j\omega)| (\sin(\varphi_\omega) \cos \omega t + \cos(\varphi_\omega) \sin \omega t)$$

$$\Leftrightarrow s(t) \approx |G(j\omega)| \sin(\varphi_\omega + \omega t)$$

Les réponses des systèmes stables à une entrée sinusoïdale est en régime permanent un signal sinusoïdal: - de même pulsation que le signal d'entrée

- amplifié (ou atténué)  $|G(j\omega)|$  (l'amplitude du signal d'entrée dépend de la fréquence du signal d'entrée)
- déphasé de  $\varphi_\omega = \arg G(j\omega)$

(Le déphasage entrée/sortie dépend de la fréquence du signal d'entrée)

$G(j\omega)$  est appelée transmittance isochrone du système

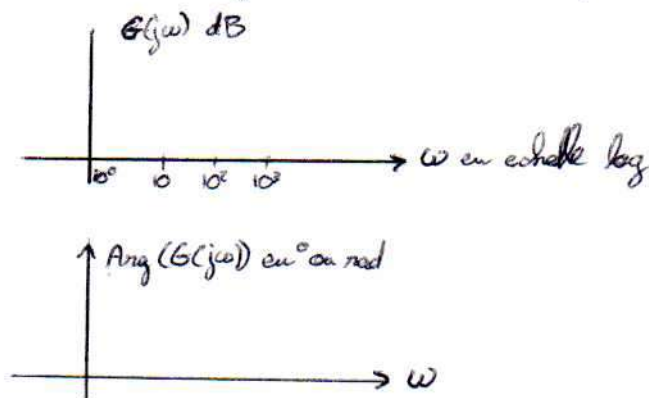
### \* Réponse en fréquence

Le module et l'argument de la transmittance isochrone caractérisent parfaitement la réponse en régime permanent d'un système (stable) soumis à une entrée sinusoïdale. Les réponses en fréquence peuvent être obtenues d'un point de vue expérimental.

Pour chaque fréquence du signal d'entrée on mesure le déphasage entrée/sortie (en régime permanent) et le rapport d'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée.

### Représentation de Bode

$G(j\omega)$  est un nombre complexe dont le module et l'argument dépendent de la (fréquence) pulsation du signal d'entrée. On appelle représentation de Bode



$$s(t) \sim |G(j\omega)| \sin(\underbrace{\varphi\omega}_{\text{rad}} + \underbrace{\omega t}_{\text{rad/s}})$$

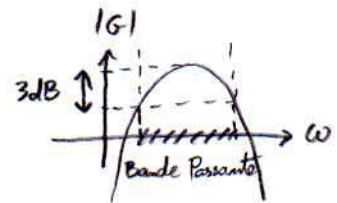
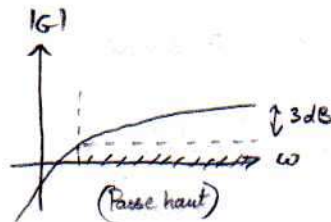
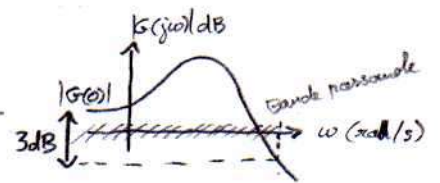
- gain statique : si l'entrée est un échelon :  $s(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p G(p) \frac{1}{p}$   
 $s(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} G(0)$  (si la limite existe) = gain statique du système

- pulsation de résonance : lorsqu'on  $\uparrow$  la fréquence, l'amplitude du signal de sortie (à-priori) augmente jusqu'à un maximum avant de diminuer. la pulsation où l'amplitude est max = pulsation de résonance du système.

- bande passante - 3dB : Soit  $\omega_c$  la pulsation pour laquelle  $|G(j\omega_c)| = \frac{|G(0)|}{\sqrt{2}}$   
 $|G(j\omega_c)|_{dB} = |G(0)|_{dB} - 20 \log \sqrt{2} = |G(0)|_{dB} - 3dB$

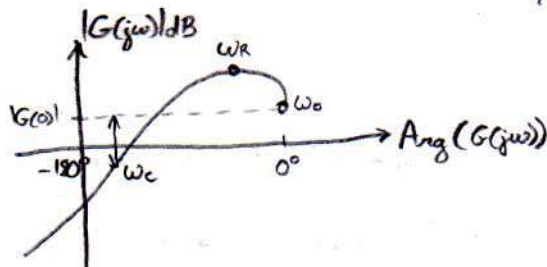
$\omega_c$  = pulsation de coupure

Alors  $[0, \omega_c]$  est appelée la bande passante du système.

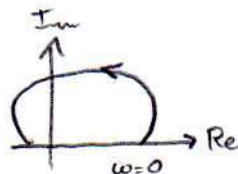


On peut également utiliser une courbe paramétrée :

Black =



Nyquist



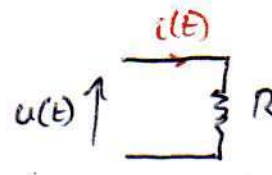
## \* Impédances symboliques

d'impédance symbolique est un cas particulier de fonction de transfert. Le signal d'entrée est l'intensité du courant qui traverse le circuit et le signal de sortie la tension aux bornes du circuit.

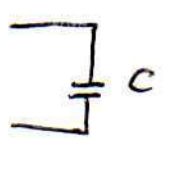
Si les CI = 0, on a:  $U(p) = Z(p) I(p)$

↓  
impédance  
symbolique

où  $\begin{cases} U(p) = \mathcal{L}(u(t)) \\ I(p) = \mathcal{L}(i(t)) \end{cases}$

  $u(t) = Ri(t)$   
 $U(p) = RI(p)$  soit  $Z_R = R$

  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$   
 $U(p) = L(pI(p) - i(0)) \Rightarrow Z_L(p) = Lp$

  $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$   
 $U(p) = \frac{1}{Cp} I(p) \Rightarrow Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$

## \* Systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

L'entrée et la sortie sont reliées par une équadiff de degré 1:  $b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t)$

ex: • circuit RC avec {entrée:  $e(t)$  tension  
                                   {sortie:  $q(t)$  charge

$$e(t) = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t)$$

• circuit RL avec ...

• thermomètre à mercure:  $\frac{dh}{dt} = \lambda(\theta - h)$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $T^0$  hauteur  
           de mercure

## \* Forme canonique de la fonction de transfert.

On prend la TL de l'éq (1) en supposant  $CI=0$  ( $s(0)=0$ ) et on utilise la linéarité de la TL avec

$$\begin{cases} S(p) = \mathcal{L}(s(t)) \\ E(p) = \mathcal{L}(e(t)) \end{cases}$$

$$b_1 p S(p) + b_0 S(p) = a_0 E(p)$$

$$\Leftrightarrow (b_1 p + b_0) S(p) = a_0 E(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{a_0}{b_1 p + b_0} E(p) \quad \text{d'où la fonction de transfert } G(p) = \frac{\frac{a_0}{b_0}}{1 + \frac{b_1}{b_0} p}$$

que l'on note sous forme canonique :  $G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$    
gain statique =  $G(0)$   
constante de temps

$$\left( \begin{array}{l} \text{Rg: } K = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \text{ si l'entrée est un échelon d'amplitude 1.} \\ \text{TVF: } \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p G(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p K}{p(1 + \tau p)} = K \end{array} \right)$$

## 2) Etude de régimes transitoires

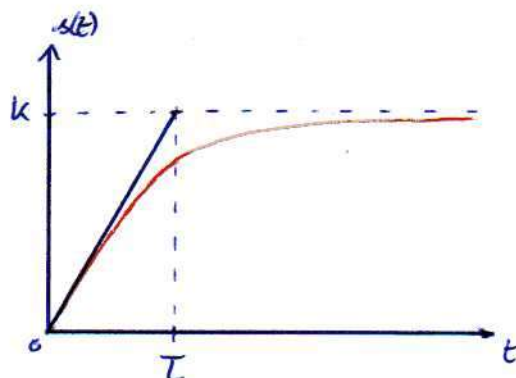
### \* Réponse indicielle

si  $e(t) = u_n(t)$ , alors la TL de la sortie est  $S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{K}{\tau} \left( \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \cdot \frac{1}{p} \right) = \frac{K}{\tau} \left( \frac{\tau}{p} - \frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} \right) = K \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right)$$

d'où par transformée de Laplace inverse :  $s(t) = K u_n(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} K u_n(t)$   
 $s(t) = K (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u_n(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \\ \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) \\ \frac{ds(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ d'où } \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{K}{\tau} \end{array} \right.$$



• Temps de réponse à 5% : temps pour lequel la sortie atteint 95% de la valeur finale et ne s'en écarte de + de 5%

•  $\frac{ds(t)}{dt} \geq 0 \quad \forall t$  : fonction transitoire croissante.

plus la constante de temps est faible, plus la pente à l'origine est grande.

•  $s(t)$  étant monotone, pour calculer le temps de réponse, il suffit de résoudre :

$$s(t_{5\%}) = 0,95 K = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,95 \quad (\text{indépendant de } K)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,05$$

$$\text{d'où } t_{5\%} = -\tau \ln(0,05) = 3\tau$$

Le temps de réponse à 5% d'un système du 1<sup>er</sup> ordre est égal à 3 fois la cste de temp.

• Point particulier :  $s(\tau) = K(1 - e^{-1}) = 0,63 K$

• On appelle

### \* Réponse à une rampe

Si  $e(t) = t u_h(t)$  alors la TL de la sortie est  $S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p^2}$

$$= K \left( \frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} - \frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} \right)$$

donc  $s(t) = K \left( \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau + t \right) u_h(t)$

$$= K(t - \tau) u_h(t) + K\tau e^{-\frac{t}{\tau}} u_h(t)$$

En régime permanent, on a donc  $s(t) \sim K(t - \tau)$  droite de pente  $K$  passant par 0 en  $(t - \tau)$

Pente à l'origine :  $\frac{ds(t)}{dt} = K(-e^{-\frac{t}{\tau}} + 1)$

d'où  $\frac{ds(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$  (asymptote horizontale)

• On définit l'erreur en vitesse

$$E_v = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) \quad (\text{lorsque } e(t) \text{ est une rampe})$$

Ici:  $E_v = \lim_{t \rightarrow \infty} t - K(t - T) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - K)t + KT$

L'erreur en vitesse est constante si  $K = 1$  (on a alors  $E_v = KT = T$ )

Si  $K \neq 1$ , l'erreur en vitesse est infinie.

### \* Réponse impulsionnelle

si  $e(t) = \delta(t)$ , alors  $E(p) = 1$  d'où  $S(p) = \frac{K}{1 + pT} = \frac{\frac{K}{T}}{\frac{1}{T} + p}$

donc  $s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} u_h(t)$

• Pente à l'origine:  $\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0) = -\frac{K}{T^2}$

### 3) Réponse harmonique

#### \* Entrée sinusoïdale:

si  $e(t) = \sin(\omega t) u_h(t)$ , alors  $E(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \Rightarrow S(p) = \frac{K}{1 + pT} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \dots$

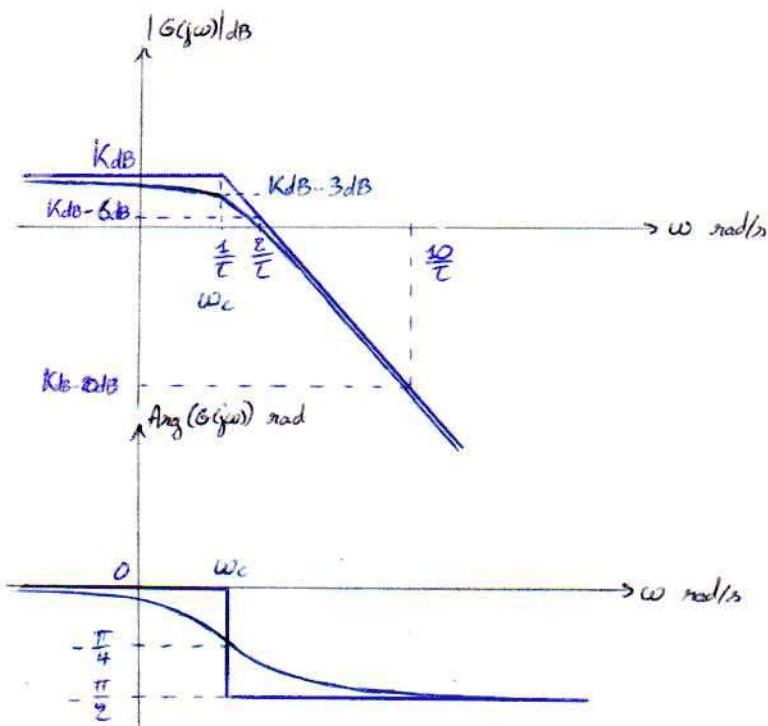
donc  $s(t) = \frac{K\omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega T)) \quad t \geq 0$

• Régime permanent:  $s(t) \underset{\infty}{\sim} |G(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(G(j\omega)))$

$G(p) = \frac{K}{1 + pT}$  d'où  $G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$

$\Rightarrow \text{Arg}(G(j\omega)) = 0 - \arctan \frac{\omega T}{1} = -\arctan \omega T$

# \* Diagrammes de Bode



## a) Tracés de Bode asymptotiques

• BF:  $\omega \rightarrow 0 \quad G(0) = K$

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K \\ \text{Arg}(G(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

• HF:  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K - 20 \log \omega \tau$$

$$20 \log K - 20 \log \tau - 20 \log \omega$$

asymptote oblique:  $-20 \text{ dB/dec}$  ou  $-6 \text{ dB/oct}$

- Intersection des asymptotes BF/HF:  $20 \log K = 20 \log K - 20 \log \omega \tau$

$$\Rightarrow \omega \tau = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau}$$

$$\text{Arg}(G(j\omega)) = -\arctan \omega \tau \approx -\frac{\pi}{2}$$

## b) Tracés réels:

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \text{Arg}(G(j\omega)) = -\arctan \omega \tau \end{cases}$$

Bande passante:  $[0, \omega_c[$  où  $\omega_c$  est la pulsation de coupure tq:  $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$

$$\frac{K}{\sqrt{1 + \omega_c^2 \tau^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

On a donc  $\text{Arg}(G(j\omega_c)) = -\arctan(\omega_c \tau) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$

Bande passante élevée si la constante de temps est faible.

# Systèmes du 2<sup>nd</sup> ordre

## 1) Définitions

### \* Système du second ordre

On appelle système du second ordre un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont reliés par équ. diff. linéaire à coeff. constants de degré 2 :

$$b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t) \quad (1)$$

\* Exemple = RLC :  $R \frac{dq(t)}{dt} + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t)$

### \* Fonction de transfert

(CI-0) On prend la TL de (1) :  $b_2 p^2 S(p) + b_1 p S(p) + b_0 S(p) = a_0 E(p)$   
 $\Leftrightarrow S(p) (b_2 p^2 + b_1 p + b_0) = a_0 E(p)$

On obtient la fonction de transfert :  $G(p) = \frac{a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$   
 $= \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2 \zeta \omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2 \zeta \left(\frac{p}{\omega_0}\right) + 1}$

$\left\{ \begin{array}{l} K = G(0) \text{ gain statique du système} \\ \zeta : \text{facteur d'amortissement} \\ \omega_0 : \text{pulsation propre} \end{array} \right.$

\* Exemple : Circuit RLC. On prend la TL de l'équ. diff. :

$$E(p) = R p Q(p) + L p^2 Q(p) + \frac{1}{C} Q(p) = \left( L p^2 + R p + \frac{1}{C} \right) Q(p)$$

Donc  $G(p) = \frac{1}{L p^2 + R p + \frac{1}{C}} = \frac{\text{Ⓢ} \rightarrow K: \text{gain statique}}{\text{Ⓢ} \rightarrow \text{LC} p^2 + \text{Ⓢ} \rightarrow \text{RC} p + 1}$   
 pulsation propre :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$   $\frac{2\zeta}{\omega_0} \Rightarrow \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  amortissement

## 2) Etude de l'équation caractéristique

Les réponses d'un système dépendent des pôles de la f° de transfert c-à-d des racines de l'équation caractéristique:  $p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$

Les pôles sont réels ssi  $\Delta \geq 0$

$$\text{ssi } \Delta' = \zeta^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (\zeta^2 - 1) = \omega_0^2 (\zeta + 1)(\zeta - 1)$$

(On suppose  $\zeta \geq 0$ )

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } \zeta > 1 \Rightarrow 2 \text{ pôles réels: } p = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} & \text{Amorti} \\ \bullet \text{ si } \zeta = 1 \Rightarrow 1 \text{ pôle double: } p = -\omega_0 \\ \bullet \text{ si } 0 < \zeta < 1 \Rightarrow 2 \text{ pôles complexes: } p = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} & \text{Non-Amorti} \end{cases}$$

## 3) Réponse indicielle

$$S(p) = \frac{1}{p} \quad G(p) = \frac{1}{p} \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

### \* Système amorti ( $\zeta > 1$ )

2 pôles réels distincts  $p_1$  et  $p_2$

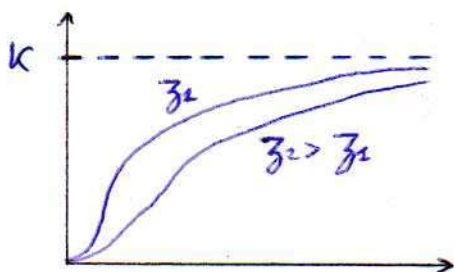
$$\text{Donc } S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p - p_1} + \frac{\gamma}{p - p_2}$$

$$\Rightarrow s(t) = (\alpha + \beta e^{p_1 t} + \gamma e^{p_2 t}) u_h(t)$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = G(0) = k = \alpha$$

$$\beta = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) S(p) \quad \text{et} \quad \gamma = \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2) S(p)$$

$$\bullet \text{ On peut montrer que } s(t) = K \left( 1 + \frac{1}{T_2 - T_1} (T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}) \right) u_h(t) \quad \begin{cases} T_1 = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{T_1 - T_2} (-e^{-\frac{t}{T_1}} + e^{-\frac{t}{T_2}}) \Rightarrow \frac{ds(0)}{dt} = 0$$

Amortissement grand  $\Rightarrow$  réponse lente

## \* Système non-amorti

$$0 < \zeta < 1$$

$$S(p) = \frac{G(p)}{P} = \frac{\alpha}{p} + \frac{Ap+B}{p^2+2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = (p + \zeta\omega_0)^2 - \zeta^2\omega_0^2 + \omega_0^2 = (p + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2) = (p + \zeta\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})^2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \alpha u_h(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{B}{(p + \zeta\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})^2}\right) = \frac{B}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Ap}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}\right) = \mu e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) \quad \mu = \frac{A}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\left( e^{(a+bj)t} = e^{at} e^{bjt} \right. \\ \begin{aligned} &\bullet \text{Partie réelle (négative)} \rightarrow \text{exponentielle décroissante} \\ &\bullet \text{Partie imaginaire} \rightarrow \text{oscillations} \end{aligned}$$

• Réponse indicielle pseudo-périodique :  $s(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t - \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}) \right)$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0$$

• Quand a-t-on  $s(t)$  maximum ? (Problème de "casé")

temps de 1<sup>er</sup> pic :  $s(t)$  maximum à  $t = t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$  est appelée pseudo-pulsation

$$s(t_{pic}) = K e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \zeta \text{ faible} \Rightarrow \text{grand dépassement}$$

Le dépassement relatif est  $D_{\%} = \frac{s(t_{pic})}{s(\infty)} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Temps de réponse à 5% : temps pour lesquels on ne s'éloigne plus de  $\pm 5\%$  de la valeur finale

$$t_{5\%} \approx \pi \frac{\zeta}{\omega_0}$$

#### 4) Réponse fréquentielle

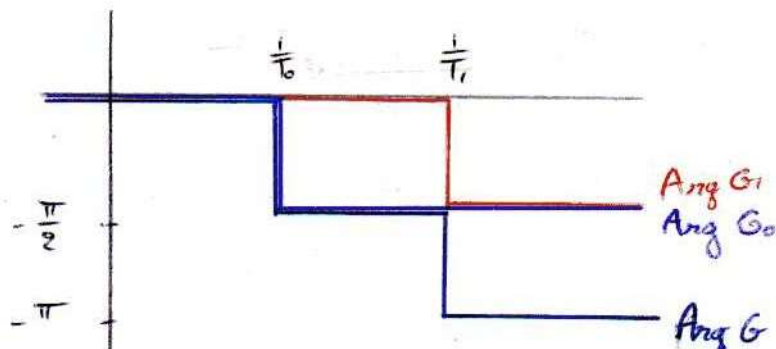
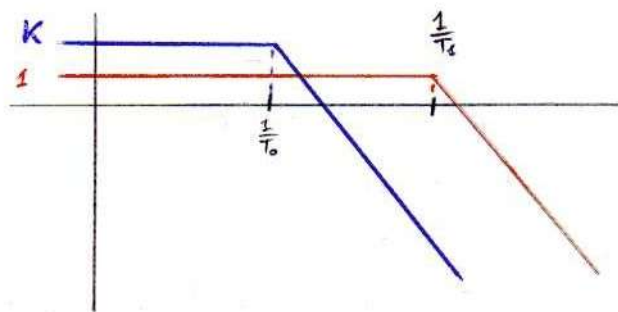
\* Système amorti ( $\zeta > 1$ )

La fonction de transfert a 2 pôles réels négatifs

$$G(p) = \frac{K u_0^2}{(p-p_0)(p-p_1)} = \frac{K}{(1+pT_0)(1+pT_1)} \quad \text{décomposable en 2 sys du 1<sup>er</sup> ordre.}$$

$$G(p) = G_0(p) G_1(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_0(p) = \frac{K}{1+pT_0} \\ G_1(p) = \frac{1}{1+pT_1} \end{cases}$$

$$\text{et } \text{Arg}(G(j\omega)) = \text{Arg}(G_0(j\omega)) + \text{Arg}(G_1(j\omega))$$

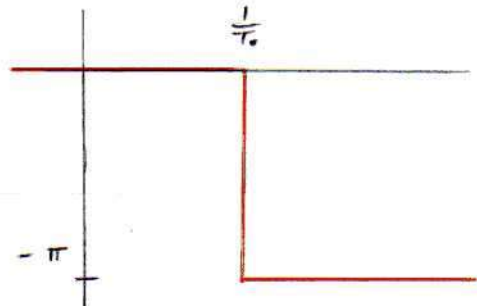
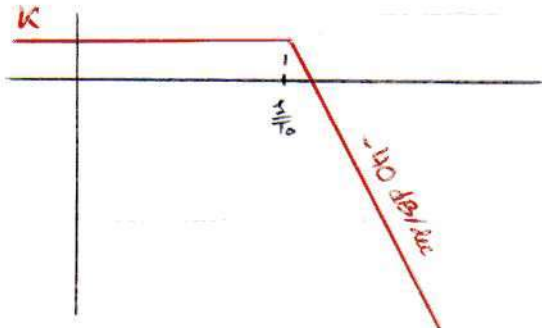


\* Système non amorti

$$\zeta = 1$$

On a 2 pôles négatifs identiques

$$G(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p - p_0)^2}$$



\* Système non amorti  $0 \leq \zeta \leq 1$

2 pôles complexes conjugués à partie réelle négative.

On ne peut plus décomposer  $G(p)$  en 2 systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

En BF:  $\omega \rightarrow 0$   $G(j\omega) \approx K$   $|G(j\omega)|_{dB} \approx K_{dB}$   
 $\text{Ang}(j\omega) \approx 0 \text{ rad}$

En HF:  $\omega \rightarrow +\infty$   $G(j\omega) = \frac{K}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$

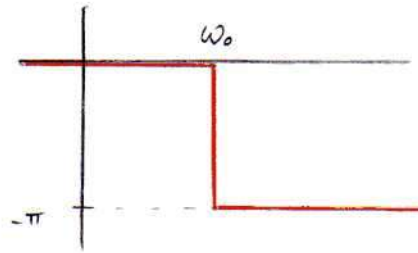
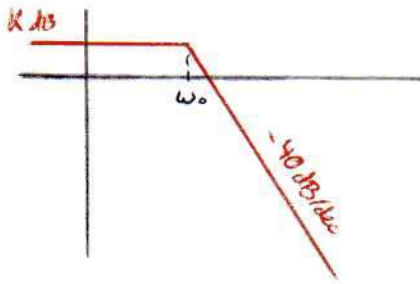
donc  $G(j\omega) \approx \frac{K}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

donc  $|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log \frac{K}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = 20 \log K - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$   
 $= \underbrace{20 \log K + 40 \log \omega_0}_{|G(j\omega_0)|_{dB}} - 40 \log \omega$   
 pente -40 dB

$|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K + 40 \log \omega_0 - 40 \log(\omega)$   
 $= \underbrace{20 \log K + 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega_0}_{|G(j\omega_0)|_{dB}} - 40 \log \omega$

$\text{Ang}(G(j\omega)) \approx -\pi$

Intersection des asymptotes en  $\omega = \omega_0$



En  $\omega_0$  :  $G(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \Rightarrow G(j\omega_0) = \frac{K}{2j\zeta}$

L'allure de la courbe est donnée par la dérivée :  $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = K f(\omega)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = -\frac{1}{2} K f(\omega)^{-\frac{3}{2}} \frac{df(\omega)}{d\omega}$$

$$\frac{d}{d\omega} \left( \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) = 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\left(-2\frac{\omega}{\omega_0}\right) \dots$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega) = -4 \frac{\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\zeta^2\right)$$

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - 2\zeta^2$$

• annulation de la dérivée si  $1 - 2\zeta^2 > 0 \Rightarrow \zeta^2 > -\frac{1}{2} \Rightarrow \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si l'amortissement est  $0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$  alors le module de  $|G(j\omega)|$  admet un max.

pour  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  (pulsation de résonance)

$$\Rightarrow \max |G(j\omega)| = |G(j\omega_R)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{\sqrt{(2\zeta^2)^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}}$$

$$= \frac{K}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \Rightarrow \text{Gain à la surtension}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ est appelé coef de surtension. } \left( \frac{|G(j\omega_c)|}{K} \right)$$

→ Ne dépend que de l'amortissement :  $\zeta \downarrow \Rightarrow Q \uparrow$

La pulsation de coupure d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre est défini par :

$$|G(j\omega_c)| = \frac{G(0)}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad \omega_c \text{ est défini pour un système non amorti}$$

$$\left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 2 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$$

Argument :  $G(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$   $\text{Arg } G(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Attention pour les AN, on peut avoir  $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 0$  pour  $\omega_0^2 - \omega^2 < 0$   
i.e  $\omega > \omega_0$  en HF

# Synthèse : Systèmes d'ordre quelconque

Soit  $G(p)$  f° de transfert d'un sys linéaire stationnaire à temps continu.

$G(p)$  est une fraction rationnelle à coeffs réels :

$$G(p) = \frac{n(p)}{d(p)} \text{ est strictement propre si } d^{\circ}n < d^{\circ}d$$

$$G(p) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^n (p - z_i)}{\prod_{j=1}^d (p - p_j)}$$

• Si les  $z_i$  et les  $p_i$  sont des pôles et des zéros  
écriture peu pratique si les pôles sont complexes conjugués.

• Si les pôles et les zéros sont réels, non nuls, on peut préfixer :

$$G(p) = \beta \frac{\prod_{i=1}^n (1 + \mu_i p)}{\prod_{j=1}^d (1 + \tau_j p)}$$

• Si les pôles et les zéros sont complexes conjugués, on les regroupe :

$$\begin{aligned} (p - p_i)(p - \bar{p}_i) &= p^2 - 2\operatorname{Re}(p_i)p + p_i^2 \\ &= p^2 + 2\zeta_i \omega_0 p + \omega_0^2 \end{aligned}$$

Dans le cas général, tout système LTI pourra s'écrire comme le produit de fonctions élémentaires

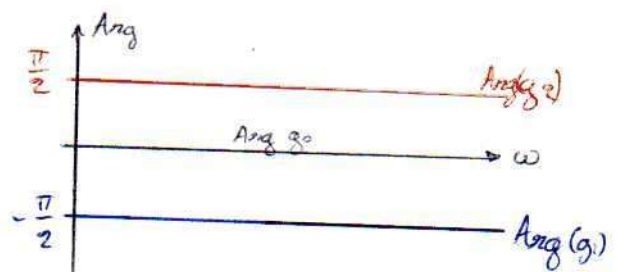
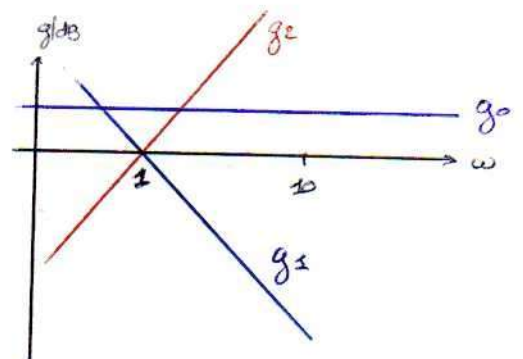
$$g_0(p) = k \text{ (gain)}$$

$$g_{\pm}(p) = \frac{1}{p} \text{ (intégrateur)}$$

$$g_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad |g_{\pm}(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega$$

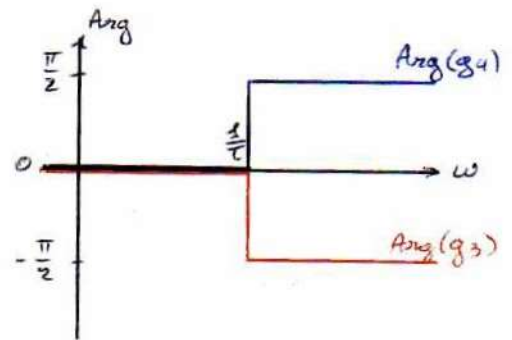
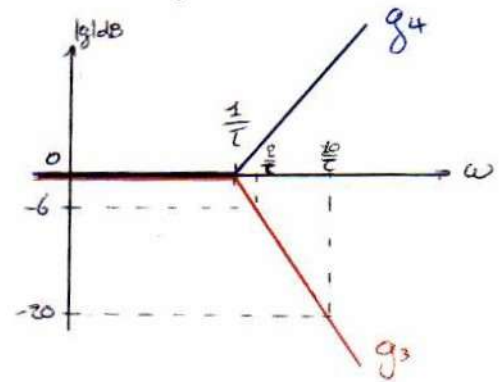
$$g_2(p) = p \text{ (dérivateur)}$$

$$g_z(p) = \frac{1}{g_1(p)} \quad |g_z(j\omega)|_{dB} = -|g_1(j\omega)| = 20 \log \omega$$



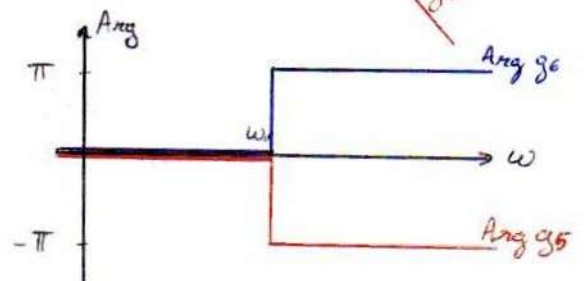
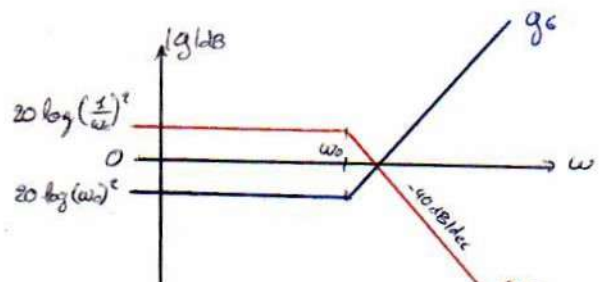
•  $g_3(p) = \frac{1}{1+\tau p}$  avec  $\tau > 0$  (système stable) pôle réel négatif

•  $g_4(p) = 1+\tau p$  zéro réel négatif



•  $g_5(p) = \frac{1}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$   
pôles complexes conjugués à partie  
réelle négative ( $\zeta > 0$ )

•  $g_6(p) = p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2$

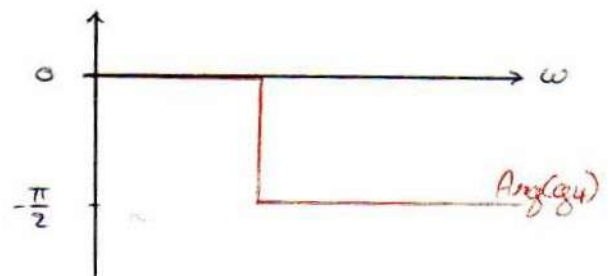
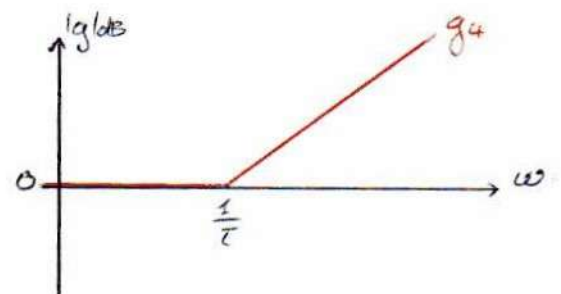


•  $g_7(p) = 1 - \tau p$   $\tau > 0$  (zéro positif)

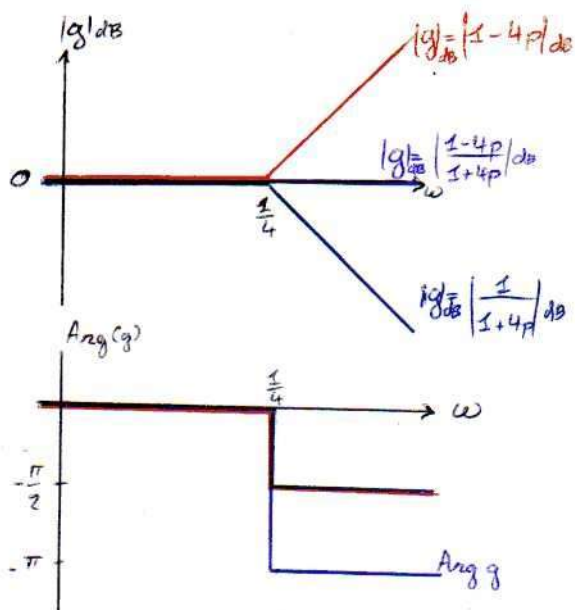
$$g_7(j\omega) = 1 - \tau j\omega$$

$$|g_7(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = |g_4(j\omega)| = \frac{1}{|g_3(j\omega)|}$$

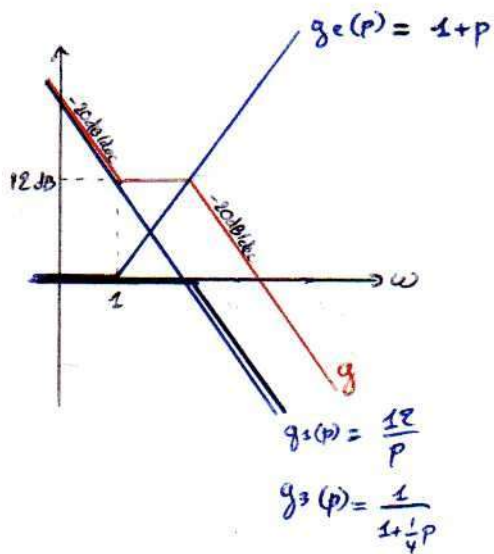
$$\text{Arg } g_7(j\omega) = -\arctan(\omega\tau) = \text{Arg } g_3(j\omega)$$



EXEMPLE : Diagrammes de Bode asymptotiques de  $G(p) = \frac{1-4p}{1+4p}$



EXEMPLE



$$(12 \text{ dB} = 4)$$

$$\text{donc } g = \frac{4}{p} \cdot (1+p) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}p}$$

